Épsilon - *Revista de Educación Matemática* *2017, nº 97, 81-100*

RINCÓN "SAPERE AUDE"… ¿resolviendo problemas?

Sixto Romero

Escuela Técnica Superior de Ingeniería

Universidad de Huelva

sixto@uhu.es

INTRODUCCIÓN

Leí hace tiempo un artículo de Joaquim Prats, Universidad de Barcelona, titulado, *Dificultades para la enseñanza de la Historia en la Educación Secundaria: reflexiones ante la situación española*, aparecido en Histodidáctica:

> *"…en Europa, y más concretamente en el Reino Unido, se planteó las dificultades que suponía la enseñanza de la historia en los niveles obligatorios de la educación… M. Price escribió que se hacía cada día más patente que la historia no interesaba a la mayor parte del alumnado adolescente, al menos tal como se explicaba. Decía también que en un modelo curricular abierto y flexible, la historia corría grave peligro* ***:"…un peligro real de desaparecer como tal del plan de estudios como asignatura específica. Como materia con derecho propio. La tendencia, decía Price, es que sobreviva sólo como ingrediente de los estudios sociales o de la educación cívica…"****. Con ello se ponía de manifiesto lo que comenzaba a ser una preocupación de un sector amplio de la comunidad educativa inglesa. El debate que generó supuso un paso adelante en los planteamientos didácticos de la historia enseñada. Se cuestionó la historia enunciativa y se propuso un modelo de enseñanza y aprendizaje basado en la construcción de conceptos, destrezas y conocimientos metodológicos. Se generaron proyectos que rompieron, de una manera radical, los viejos tópicos de la enseñanza de la historia y plantearon modelos que, hoy todavía, resultan bastante novedosos. El planteamiento de base era retomar la historia entendida como una materia escolar con un alto grado posibilidades educativas, y enseñar cómo se construye el conocimiento histórico a través de situaciones de simulación de la indagación histórica y centrándose en el aprendizaje de los conceptos fundamentales de la teoría histórica.*
>
> *"…en España, todas las posiciones que se manifestaron en el reciente debate sobre qué historia enseñar, propugnaban un tipo de conocimiento que ofrecía la historia como un conocimiento acabado. Todos defendieron una historia enunciativa,…"*
>
> *"…una de las razones es que no se reconoce para la educación como un saber discursivo, reflexivo y científico…"* .

Me pregunto: ¿cómo "tratamos" los matemáticos a La Historia de las Matemáticas?

Desde hace mucho tiempo vengo reivindicando que en los curricula de la enseñanza de las matemáticas debe incluirse la HISTORIA DE LAS MATEMATICAS CON MAYÚSCULAS. El origen de las matemáticas es muy distante. Pero durante todo el tiempo que precede a la invención de la escritura, parece difícil enunciar algo más que generalidades, solo apoyado indirectamente por alguna evidencia arqueológica (sucesiones de muescas o marcas que pueden hacer pensar en un conteo, una habilidad, en unas figuras extrañas, etc.) o analogías que pueden extraerse de los estudios etnológicos: sabíamos cómo contar; aquí, se podrían usar varios sistemas de numeración (decimal, duodecimal, sexagesimal, etc.), podríamos usar solo cuatro números (uno, dos, tres, "muchos") ; también deberíamos conocer algunos principios de la topografía de los campos cultivados, impuestos por el desarrollo de la agricultura. En cualquier caso, llama la atención que la invención de la escritura está en todas partes estrechamente vinculada a preocupaciones matemáticas, o al menos contables. Comenzamos registrando números, pero también muy rápidamente, nos preguntamos sobre las relaciones que existen entre ellos. Colocados y resueltos muy rudimentarios en Mesopotamia y Egipto, estos problemas ya delinean los contornos de una aritmética, un álgebra, una geometría: ¡Aritmética, Álgebra y Geometría siempre unidas!

Por ello incluiremos, su aparición será en el primer número del nuevo año 2018, dentro del Rincón SAPERE un parágrafo, una breve reseña histórica sobre Historia de las Matemáticas: ***Matemáticas: ¿dónde comenzó todo?***

Permitidme que a modo de presentación os muestre una pincelada de la sección dentro del Rincón.

No puedo negar mi atracción, mi admiración, mi devoción por los Leonardos: Leonardo de Pisa (Pisa, 1170 -¿?1240) y Leonardo da Vinci (Vinci, 15 de abril de 14522-Amboise, 2 de mayo de 1519).

Recordemos que en la Historia de las Matemáticas la presencia del número ha sido clave, entre otros se debe a Leonardo de Pisa, también llamado Leonardo Pisano, Leonardo Bigollo o simplemente Fibonacci.

El apodo de Guglielmo (Guillermo), padre de Leonardo, era Bonacci. Leonardo recibió de forma póstuma el apodo de Fibonacci (por filius Bonacci, hijo de Bonacci). Guglielmo dirigía un puesto de comercio en Bugía, en el norte de África (hoy Bejaia, Argelia), y según algunas versiones era el cónsul de la República de Pisa. De niño Leonardo viajó allí para ayudarlo, y fue donde aprendió el sistema de numeración árabe.

Consciente de la superioridad de los numerales árabes (con un sistema de numeración decimal, notación posicional y un dígito de valor nulo: el cero), Fibonacci viajó a través de los países del Mediterráneo para estudiar con los matemáticos árabes más destacados de ese tiempo, regresando hacia el 1200.

Las sucesiones de Fibonacci nacen gracias a Leonardo de Pisa que es más conocido por Fibonacci, que significa «hijo de Bonaccio», fue uno de los matemáticos más relevantes de la Edad Media.

Su empeño fue intentar poner orden en todo aquello cuánto había aprendido de aritmética y álgebra, y de ofrecer al mundo, inicialmente a los comerciantes, un potente sistema de cálculo, cuyas ventajas él había ya experimentado. Nace así en 1202, cuándo Leonardo tiene 32 años de edad, la publicación denominada Liber abaci («abaci» en el sentido de aritmética y no del ábaco como instrumento). Este libro mostró la importancia del nuevo sistema de numeración aplicándolo a la contabilidad comercial, conversión de pesos y medidas, cálculo, intereses, cambio de moneda, y otras numerosas aplicaciones. En estas páginas describe el cero, la notación posicional, la descomposición en factores primos, los criterios de divisibilidad. El libro fue recibido con entusiasmo entre el público culto, teniendo un impacto profundo en el pensamiento matemático europeo., primero de los libros occidentales en describir los números arábigos, considerando que el primero fue la Crónica Albeldense, o Codex Conciliorum Albeldensis seu Vigilanus, también denominado Cronicón Emilianense I, es un manuscrito anónimo redactado en latín y finalizado en el 881. Al estar dirigido a comerciantes y académicos, empezó a convencer al público de la superioridad del nuevo sistema numérico, nace así la primera suma matemática de la Edad Media. Este libro mostró la importancia del nuevo sistema de numeración aplicándolo a la contabilidad comercial, conversión de pesos y medidas, cálculo, intereses, cambio de moneda, y otras numerosas aplicaciones. En estas páginas describe el cero, la notación posicional, la descomposición en factores primos, los criterios de divisibilidad. El libro fue recibido con entusiasmo entre el público culto, teniendo un impacto profundo en el pensamiento matemático europeo.

La sucesión de Fibonacci es una sucesión de números muy conocida y usada en matemáticas además es una sucesión infinita que, empezando por la unidad, cada uno de sus términos es la suma de los dos anteriores; resultando sorprendente que una construcción matemática como esa aparezca recurrentemente en la naturaleza así como la distribución de las hojas alrededor del tallo, la reproducción de los conejos o la disposición de las semillas en numerosas flores y frutos se produce siguiendo secuencias basadas exclusivamente en estos números. Lo podemos ver por una curiosa sucesión de números:

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, \ldots$$

Esta sucesión de números tiene múltiples aplicaciones en diversas ramas del saber humano: ciencias de la computación, teoría de juegos, geometría, matemáticas, la naturaleza, en la literatura, en física, y en el arte...

La sucesión de Fibonacci fue explicada por el matemático como la solución a un problema de cría de conejos, aunque éste se trate sólo de una metáfora para volver el conocimiento de fácil acceso. *"Un hombre tenía una pareja de conejos en un lugar controlado y quería saber cuántos podrían reproducirse en un año a partir de la pareja inicial, considerando que de forma natural los conejos tienen una pareja cada mes y que es a partir del segundo cuando se empiezan a reproducir"*. De este modo partimos de que una primera cría de conejos desencadenará a toda una comunidad de conejos. 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13... conforme el tiempo avance y los animales se vayan reproduciendo. Los números pueden obtenerse sumando el último de la sucesión con el valor anterior y así sucesivamente.

Algo que resulta por demás interesante es la relación que la sucesión de Fibonacci guarda con la Geometría. Es aquí donde aparece el número áureo

$$\varnothing = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}618034$$

un número irracional que consiste en una proporción que se encuentra tanto en figuras geométricas como en la naturaleza. Como por ejemplo en la concha del nautilus, la relación entre las partes, el techo y las columnas del Partenón en Atenas, en el cuadro "Leda Atómica" de Salvador Dalí, en las estructuras y tiempos de la película "El acorazado Potemkin" de Serguéi Einsenstein o en las estructuras de algunas sonatas de Mozart, Beethoven y Schubert. La relación reside en que si dividimos los valores de la sucesión Fibonacci entre el que le anteceda

$$\frac{1}{1},\frac{2}{1},\frac{3}{2},\frac{5}{3},\frac{8}{5},\frac{13}{8},\frac{21}{13},\frac{34}{21},\frac{55}{34},.\frac{89}{55},.....,\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$
$$1,2,1.5,1.666,1.6,1.615,1.619,1.617,1.618,.....,1.618034$$

encontraremos que el resultado tienda a aproximarse al número áureo: 1.618034. El número áureo y la sucesión de Fibonacci forman parte del conocimiento humano que pretende explicar el mundo a partir de las matemáticas, y nos permite apreciar la belleza de la naturaleza desde un punto de vista distinto a la mera contemplación.

¡Ay, divinos números y geometría! Ya Rafael Alberti en su poema *A la divina proporción* los elevó a la *divinidad*

A ti, maravillosa disciplina,
media, extrema razón de la hermosura,
que claramente acata la clausura
viva en la malla de tu ley divina.

A ti, cárcel feliz de la retina,
áurea sección, celeste cuadratura,
misteriosa fontana de mesura
que el Universo armónico origina.

A ti, mar de los sueños, angulares,
flor de las cinco formas regulares,
dodecaedro azul, arco sonoro.
Luces por alas un compás ardiente.
Tu canto es una esfera transparente.
A ti, divina proporción de oro.

SAPERE AUDE, GEOMETRÍA

1. Ejercicios de aquí y allá (solución a la Propuesta del número anterior 96)

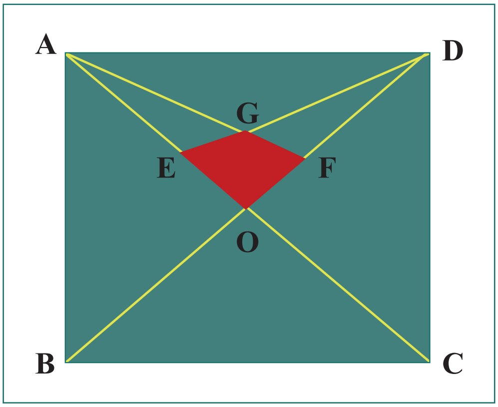
Propuesta 1: dos joyitas geométricas

Vamos a resolver en este SAPERE AUDE dos joyitas en las que aparecen los conceptos que probablemente se ha utilizado más en la historia de la Geometría: la semejanza de triángulos, los teoremas de Thales y Pitágoras.

JOYITA: a) Si $2EO = AE$, $2FO = FD$ y que $ABCD$ es un cuadrado de lado 4 cm, ¿cuál es el área de la región coloreada en rojo?

SOLUCIÓN

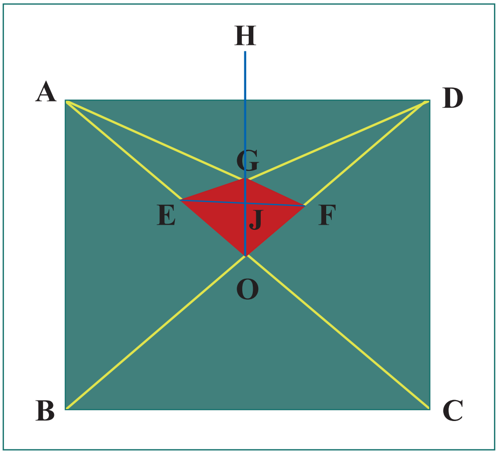
PASO 1



Construyamos el segmento OH perpendicular al lado AD, siendo G el punto de intersección de los segmentos AF y ED y J el punto de intersección delos segmentos OH y EF. Obsérvese como el punto G pertenece al segmento OH, y el área de la zona coloreada de rojo es el área del cuadrilátero GFOE y será por tanto igual a:

Área(GFOE)=Área(ADG)+Área(AFO)+Área(EDO)-Área(ADO)

PASO 2



Es muy fácil deducir que el área del triángulo ADO es igual a 4 cm^2. Basta ver que es la cuarta parte del área del cuadrado ADCB o comprobar que es el producto de la base AD (4 cm) por la altura OH (2cm) dividido por 2, fórmula del área de un triángulo.

PASO 3

Como las diagonales de un cuadrado son perpendiculares entre ellas, se tiene que AO y DO son perpendiculares y el área del triángulo EDO es igual:

Área(EDO)= (DO . EO) / 2

Veamos cual es el valor de AO y EO. El valor de AO se puede calcular de varias formas. Como el área del triángulo ADO es 4 cm^2 y AO=DO

$$\acute{A}rea\,(ADO) = 4 = \frac{AO.DO}{2} = \frac{AO.AO}{2} = \frac{AO^2}{2} \Rightarrow AO^2 = 8 \Rightarrow AO = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

El valor de

$$EO = \frac{AO}{3} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

y el área del triángulo AFO es

$$Área(AFO) = Área(EDO) = \frac{2\sqrt{2}(\frac{2\sqrt{2}}{3})}{2} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}cm^2$$

PASO 4

Calculemos el área de ADG. Aplicando el teorema de Thales se tiene que EF paralelo a AD y $EF = \frac{AD}{3}$, por lo tanto los triángulos AHG y GFJ son semejantes y se tiene que

$$\frac{HG}{GJ} = \frac{AH}{JF} = 3$$

y entonces $GJ = \frac{1}{3}HG$.

Por otro lado, los triángulos AHO y EJO son también semejantes y

$$\frac{HO}{JO} = \frac{AO}{EO} = 3$$

Por lo tanto, $JO = \frac{2}{3}cm$. Observemos que HG+GJ+JO=HO= 2 cm, sustituyendo los valores de GJ y JO anteriores se obtiene

$$HG + \frac{1}{3}HG + \frac{2}{3} = 2 \Rightarrow \frac{4}{3}HG = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3} \Rightarrow HG = 1cm$$

Por consiguiente, el área del triángulo ADG es igual a

$$Área(ADG) = \frac{Base.Altura}{2} = \frac{AD.HG}{2} = \frac{4.1}{2} = 2cm^2$$

PASO 5

Y el área de la zona coloreada, Área(GFOE) es igual a

Área(GFOE) = Área(ADG)+Área(AFO)+Área(EDO)-Área(ADO)= $2 + 2.\frac{4}{3} - 4 = \frac{2}{3}cm^2$

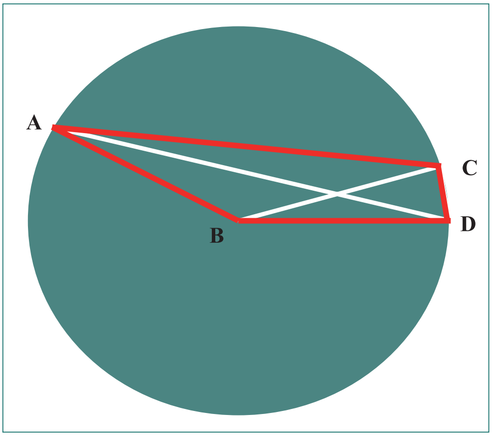
Área(GFOE) = $\frac{2}{3}cm^2$

JOYITA: b) *Sea ABCD un cuadrilátero tal que* $\widehat{CAD}=25^o$, $\widehat{ACD}=45^o$ *y* $\widehat{BAC}=\widehat{BCA}=20^o$. *¿Cuánto mide el ángulo* $\widehat{DBC}$*?*

SOLUCIÓN

PASO 1

Puesto que $\widehat{BAC}=\widehat{BCA}=20^o$, se sabe que el triángulo ABC es isósceles, con AB=BC y el ángulo $\widehat{ABC}= 120^o - 20^o - 20^o= 140^o$ (ver figura).



PASO 2

Se sabe también que el ángulo exterior de $\widehat{ABC}$, es decir el ángulo que, con $\widehat{ABC}$, hace un giro completo, mide $360^o - 140^o = 220^o$.

Por otro lado, fijemos la atención en el triángulo ACD, se tiene que

$$\widehat{ADC}= 180^o-\widehat{ACD} - \widehat{CAD}= 180^o - 45^o - 25^o = 110^o$$

El ángulo exterior de $\widehat{ABC}$ es entonces igual a $2\widehat{ADC}$.

PASO 3

Tracemos el círculo de centro B y radio AB=BC. Sea D' la intersección del círculo y del segmento BD, entonces, $2\widehat{AD'C}$ tiene la misma medida que el ángulo exterior de $\widehat{ABC}$ puesto que interceptan el mismo arco, según el teorema de la medida del ángulo inscrito. Por lo tanto, D'=D.

Así llegamos a la conclusión que $\widehat{DBC}=2\widehat{CAD}= 2\,(25^o) = 50^o$

SAPERE AUDE, TEORÍA DE NÚMEROS

Propuesta 2: dos joyitas numéricas

La Teoría de números, rama de las matemáticas relacionadas con las propiedades de los enteros positivos, a veces llamado *aritmética superior*, se encuentra entre las actividades matemáticas más antiguas y naturales y siempre ha fascinado tanto a los aficionados como a los matemáticos profesionales. En contraste con otras ramas de las matemáticas, muchos de los problemas y teoremas de la teoría de los números pueden ser entendidos por legos, aunque las soluciones a los problemas y las pruebas de los teoremas a menudo requieren un fondo matemático sofisticado.

Hasta mediados del siglo XX, la teoría de números se consideraba la rama más pura de las matemáticas, sin aplicaciones directas al mundo real. La llegada de los ordenadores y de las nuevas tecnologías revelaron que la teoría de los números podría proporcionar respuestas inesperadas a muchos problemas del mundo real. Al mismo tiempo, las mejoras en la tecnología informática permitieron a los investigadores en teoría de números, realizar avances notables al *factorizar grandes números*, *determinar números primos*, *probar conjeturas* y *resolver problemas numéricos* que antes se consideraban inalcanzables.

La moderna teoría de números es una disciplina amplia que se clasifica en subtítulos tales como *teoría elemental, teoría algebraica, teoría analítica, teoría geométrica y teoría probabilística.* Estas categorías reflejan los métodos utilizados para abordar los problemas relacionados con los enteros.

Tres ejercicios, joyitas, con diferentes grados de dificultad presentamos en este Sapere Aude.

JOYITA: a) Consideremos $x, y, z, t \in N$ tales que $x<2y, y<3z, z<4t, t<40$. ¿Cuál es el valor mayor que puede tomar el número x?

SOLUCIÓN

PASO 1

Partiendo de los datos iniciales se tiene que

$$\begin{aligned} x < 2y &\Rightarrow x < 2y-1 \\ y< 3z &\Rightarrow y< 3z-1 \\ z< 4t &\Rightarrow z < 4t-1 \\ t < 40 &\Rightarrow t< 39 \end{aligned}$$

De dónde

$$x \le 2y-1 \le 2(3z-1)-1 = 6z-3 \le 6(4t-1)-3 = 24t-9 \le 24.39-9 = 936-9 = 927$$

PASO 2

Tomando

$$t = 39; z = 4.39 - 1 = 155; y = 3.155 - 1 = 465 - 1 = 464$$

llegamos a obtener

$$x = 2.464 - 1 = 928 - 1 = 927$$

Por lo tanto, vemos que el valor máximo para x es: $x = 927$.

JOYITA: b) ¿Cuántas combinaciones de tres (tripletas) números primos $\{x,y,z\}$ satisfacen la ecuación

$$x + y^2 + z^3 = 200\ ?$$

SOLUCIÓN

PASO 1

Como x, y, z son primos, $x+y^2+z^3$ al ser igual a 200 es par, uno de ellos es igual a 2. Ensayamos con valores enteros para x, y, z, vemos que $z<6$ e $y<15$ porque $6^3>200$ y $15^2>200$.

De aquí se deduce que

z es igual a 2,3 ó 5
y es igual a 2,3,5,7,11 ó 13.

PASO 2

Analicemos los tres casos siguientes:

Caso 1

Si $x = 2$, entonces $y^2 + z^3 = 198$. Pero con ninguno de los dos casos, $z = 3$ *ó* 5 podemos tener $y^2+z^3=198$.

Caso 2

Si $y = 2$, entonces $x+z^3=196$. Supongamos $z = 5$, entonces $x = 196-125= 71$ que es un número primo. Se tiene entonces una solución: {71,2,5}.

Si se supone ahora que $z=3$, $x=196-127=169$ que es divisible por 13. Para este caso no hay solución.

Caso 3

Si $z=2$, entonces $x+y^2=192$.
Se analiza los 5 casos posibles correspondientes a los 5 valores posibles de y.

3.1. Si $y=3$, entonces $x=183$ que es divisible por 3.
3.2. Si $y=5$, entonces $x=167$ que es primo y obtenemos la solución **{167,5,2}.**
3.3. Si $y=7$, entonces $x=143$ que es múltiplo de 11.
3.4. Si $y=11$, entonces $x=71$ que es un número primo y obtenemos la solución **{71,11,2}.**
3.5. Si $y=13$, entonces $x=23$ y obtenemos la solución **{23,13,2}.**

PASO 3

En definitiva, tenemos las cuatro tripletas de números primos,

$$71 + 2^2 + 5^3 = 200$$
$$167 + 5^2 + 2^3 = 200$$
$$71 + 11^2 + 2^3 = 200$$
$$23 + 13^2 + 2^3 = 200$$

JOYITA: c) En el siguiente cuadro de número

1 2 3
4 5 6
7 8 9

la suma de los elementos que están en las diagonales valen 15. Si escribimos dos cuadros C1 y C2 que se construyen siguiendo el mismo criterio con:

- C1. Los números del 1 al 64.
- C2. Los números del 1 al 144.

1. ¿Cuál será la suma de los elementos que están en cada una de las diagonales de los cuadros C1 y C2?

2. Generalizar *al caso C_n: ¿cuál será la suma de los elementos de cada una de las dos diagonales del cuadro formado por los números del 1 a n^2?*

SOLUCIÓN

1. SUMA DE LOS ELEMENTOS DE LAS DIAGONALES DE LOS CUADROS C1 Y C2

PASO 1

CUADRO C1

El cuadro C1 será de la forma:

a) Observemos que los números de la diagonal principal son **1,10,19,28,37,46,55 y 64** cuya suma es

$S = 1 + 10 + 19 + 28 + 37 + 46 + 55 + 64 = 1 + (1 + 9) + (1+ 2.9) + (1 + 3.9) + ... + (1 + 7.9) =$

$\overbrace{1 + \dots + 1}^{8} + 9\ (1 + 2 + \dots + 7) = 8 + (1 + 2 + \dots + 7)\ 8 + 9\ \frac{7.8}{2} = 8 + 252 = 260$

1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	**8**
9	**10**	*11*	*12*	*13*	*14*	**15**	*16*
17	*18*	**19**	*20*	*21*	**22**	*23*	*24*
25	*26*	*27*	**28**	**29**	*30*	*31*	*32*
33	*34*	*35*	**36**	**37**	*38*	*39*	*40*
41	*42*	**43**	*44*	*45*	**46**	*47*	*48*
49	**50**	*51*	*52*	*53*	*54*	**55**	*56*
57	*58*	*59*	*60*	*61*	*62*	*63*	**64**

Se ha aplicado a 1,2,3,4,5,6 y 7, la suma de los términos de una progresión aritmética

$$S = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} = \frac{(1+7)8}{2}$$

NOTA: También podíamos haber aplicado directamente la fórmula a los términos de la progresión aritmética **1,10,19,28, 37,46,55,64.**

$$S = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} = \frac{(1+64)8}{2} = \frac{520}{2} = 260$$

Por ello, la suma de los términos de los elementos de la diagonal principal es

$$S\mathbf{=260}$$

b) Los números de la diagonal secundaria son **8,15,22, 29,36,43,50,57**, y podemos aplicar el mismo razonamiento empleado en el apartado (a):

$S = 8 + 15 + 22 + 29 + 36 + 43 + 50 + 57 = (1 + 1.7) + (1 + 2.7) + (1 + 3.7) + (1 + 4.7) + (1 + 5.7) + (1 + 6.7) + (1 + 7.7) + (1 + 8.7) = S\,\overbrace{(1 + 1 + \dots + 1)}^{8}M+ 7. (1+2+3+\dots+8) =$

$$8+7\ \frac{(1+8).8}{2} = 8 + 7\ \frac{72}{2} = 8 + 252 = 260$$

También se podía haber aplicado la suma de los términos de una progresión aritmética a términos cuyo primero es 8, y el último es 57 con razón $d=7$

- Tenemos así que la suma de los términos de los elementos de la diagonal secundaria es

$$S=\mathbf{260}$$

NOTA: También podemos probar que la suma de las diagonales principal y secundaria coinciden de la siguiente manera:

Se cumple que las diferencias entre los términos

1	2	3	4	5	6	7	**8**
9	**10**	11	12	13	14	**15**	16
17	18	**19**	20	21	**22**	23	24
25	26	27	**28**	**29**	30	31	32
33	34	35	**36**	**37**	38	39	40
41	42	**43**	44	45	**46**	47	48
49	**50**	51	52	53	54	**55**	56
57	58	59	60	61	62	63	**64**

de las dos diagonales se compensan puesto que la diferencia entre los dos términos diagonales sobre:

- la primera línea es 8-1= 7
- la segunda línea es 15-10=5
- la tercera línea es 22-19= 3
- la cuarta línea es 29-28= 1
- la quinta línea es 36-37= -1
- la sexta línea es 43-46=-3
- la séptima línea es 50-55=-5
- la octava línea es 57-64=-7

Por consiguiente, la suma de los términos sobre la diagonal yendo desde la esquina de la parte superior derecha a la esquina de abajo izquierda es también 260.

PASO 2

CUADRO C2

El cuadro C2 será de la forma

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	**12**
13	**14**	15	16	17	18	19	20	21	22	**23**	24
25	26	**27**	28	29	30	31	32	33	**34**	35	36
37	38	39	**40**	41	42	43	44	**45**	46	47	48
49	50	51	52	**53**	54	55	**56**	57	58	59	60
61	62	63	64	65	**66**	**67**	68	69	70	71	72
73	74	75	76	77	**78**	**79**	80	81	82	83	84
85	86	87	88	**89**	90	91	**92**	93	94	95	96
97	98	99	**100**	101	102	103	104	**105**	106	107	108
109	110	**111**	112	113	114	115	116	117	**118**	119	120
121	**122**	123	124	125	126	127	128	129	130	**131**	132
133	134	135	136	137	138	139	140	141	142	143	**144**

a) Observemos que los números de la diagonal principal son: **1,14,27,40,53,66,79,92, 105,118,131,144** cuya suma es aplicando directamente la fórmula de la suma de una progresión aritmética

$$S = \frac{(1+144).12}{2} = \frac{145.12}{2} = 870$$

Por lo tanto, la suma de los términos de la diagonal principal es

$$S = \mathbf{870}$$

b) Los términos de la diagonal secundaria son

12, 23,34,45,56,67,78,89,100,111,122,133

cuya suma es

$$S = \frac{(12+133)12}{2} = \frac{145.12}{2} = 145.6 = 870$$

NOTAS:

- Al mismo resultado llegamos, si razonamos de manera análoga que anteriormente, teniendo en cuenta que la razón para los elementos de la diagonal principal es d=13 y para los elementos de la diagonal secundaria es d=11.
- Como en el caso primero del cuadro 8x8 para el cuadro de 12x12 se puede demostrar la igualdad de la suma de los elementos de las diagonales principal y secundaria, respectivamente, viendo las diferencias de
  - la primera línea: 12-1 = 1
  - la segunda línea: 23-14 = 9
  - la tercera línea: 34-27 =7
  - la cuarta línea: 45-40 = 5
  - la quinta línea: 56-53= 3
  - la sexta línea: 67-66 =1
  - la séptima línea: 78-79 =-1
  - la octava línea: 89-92 =-3
  - la novena línea: 100-105=-5
  - la décima línea: 111-118=-7
  - la décimo-primera línea: 122-131=-9
  - la décimo-segunda línea: 133-144=-11

  compensándose las diferencias y por ello la suma de los términos sobre la diagonal yendo desde la esquina de la parte superior derecha a la esquina de abajo izquierda es también 870.

2. Generalicemos al caso de un cuadro de "n" elementos

- **CUADRO Cn**
  El cuadro Cn es de la forma

1	2	3	…………………	n-1	**n**
n+1	**n+2**	n+3	**…………………**	**2n-1**	2n
2n+1	2n+2	**2n+3**	…………………	3n-1	3n
::::::::::::	::::::::::::	::::::::::::	::::::::::::	::::::::::::	::::::::::::
::::::::::::	::::::::::::	::::::::::::	::::::::::::	::::::::::::	::::::::::::
n^2-n+1	n^2-n+2	n^2-n+3…………………		n^2-1	**n^2**

Sigamos el mismo esquema que para los cuadros anteriores de 8x8 y 12x12.

a) Observemos que los números de la diagonal principal son:

1, n+2, 2n+3, ……………………, n^2-n-1, n^2

cuya suma es aplicando directamente la fórmula de la suma de una progresión aritmética

$$S=\frac{(1+n^2).n}{2}$$

b) La suma de los elementos de la diagonal secundaria cuyos elementos son

n, 2n-1, 3n-2, …………, n^2-n+1 es

$$S=\frac{[n+(n^2-\ n+1)].n}{2}\quad\frac{(n^2+\ 1).n}{2}$$

Es decir

$$S=\frac{(1+n^2).n}{2}$$

que como esperamos coinciden las sumas de las diagonales principal y secundaria.

NOTAS: Es este un ejercicio para "sacarle mucho jugo".
1. A partir de este resultado podemos indicar a nuestros estudiantes que no es tan complicado generalizar una propiedad. En este caso:

- Si le damos el valor n=8, se tendrá la suma

$$S=\frac{(1+8^2).8}{2}=\frac{65.8}{2}=260$$

que es el caso del CUADRO1.

- Si le damos el valor n=12, se tendrá la suma

$$S=\frac{(1+12^2).12}{2}=\frac{145.12}{2}=\frac{1740}{2}=870$$

que es el caso del CUADRO 2.

2. También se puede invitar al estudiante a que investigue a construir los cuadros para ***n=1,2,3,4,5,6,………, k*** líneas e intentar obtener una regla para obtener el mismo valor que se obtiene para el valor de la suma de las diagonales principales y secundaria utilizando otras líneas

- **n=1** con suma S=1

1

- **n=2**

1	2
3	4

con suma S=5

- **n=3**

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Con suma S=15

En este caso puede comprobarse la belleza de los números cuándo se presentan organizados en cuadros de un número de orden impar cómo éste último. Por ejemplo, los elementos de las diagonales: 1+5+9=3+5+7 suman igual que las líneas centrales 2+5+8=4+5+6 e igual que las sumas [(1+4+7) + (3+6+9)]/2=(1+2+3+7+8+9)/2 de las dos líneas verticales (horizontales) paralelas 1ª y 3ª.

- **n=5**

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

Con suma S=65

Los elementos de las diagonales: 1+7+13+19+25=5+9+13+17+21 suman igual que las líneas centrales 3+8+13+18+23=11+12+13+14+15 e igual que las sumas de las dos líneas verticales (horizontales) 2ª y 4ª, 1ª y 5ª

[(2+7+12+17+22) + (4+9+14+19+24)]/2=[(6+7+8+9+10)+(16+17+18+19+20)]/2

[(1+2+3+4+5)+(21+22+23+24+25)]/2=[(1+6+11+16+21)+(5+10+15+20+25)]

3. ¿De este resultado, se puede inferir inmediatamente alguna propiedad genérica para los ***cuadros de orden impar***?

4. ¿Sucede lo mismo para los cuadros de orden par?
Véase caso n=4.

- n=4

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

Con suma S=34

Los elementos de las diagonales: 1+6+11+16=4+7+10+13 pero en este caso al no existir una línea central, ¿qué sucede con las demás líneas? Un invitación heurística al estudiante es recomendable para que ensaye y vea que la suma que se obtiene con las líneas verticales (horizontales) (2ª+3ª)/2, (1ª+4ª)/2 coinciden, y obtener una regla para genérica para los cuadros de orden par. ¡Seguir profundizando en el estudio de estas disposiciones puede llevar a obtener una expresión para las progresiones aritméticas de orden superior que bien podría contextualizarse para los alumnos de bachillerato!.

SAPERE AUDE, EJERCICIOS DE AQUÍ Y ALLÁ, PROPUESTAS

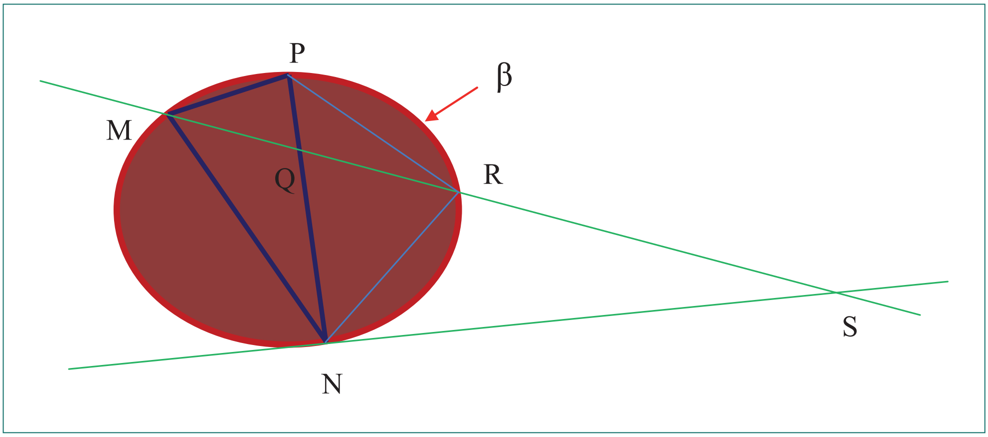
Propuesta 1: dos joyitas geométricas

Frente al obstáculo, el impedimento y la dificultad, la poca difusión de planteamientos didácticos de la enseñanza de la Geometría y considerando las diferencias existentes entre los niveles educativos a los que nos dirigimos, mi intención es seguir humildemente brindando un material que dé cuenta de algunos de los componentes esenciales que se encuentran presentes en la enseñanza de esta parte de las Matemáticas. Es importante reflexionar sobre las razones de la necesidad de/para enseñar Geometría. Si los docentes ¿tenemos claro? ***"el por qué"***, estaremos en condiciones de tomar decisiones más acertadas acerca de su enseñanza. Ya lo he indicado en números anteriores: una razón para insistir en la enseñanza de la Geometría podemos encontrarla en nuestro entorno inmediato, basta con mirarlo y descubrir que en él se encuentran muchas relaciones y conceptos geométricos: la Geometría modela el espacio que percibimos: construcción y demostración teórica de esta parte de las Matemáticas.

¡Estas son dos joyitas que hacen muy necesario e interesante el estudio de la Geometría que me atrevo a llamarla Geometría Olvidada!

a) *Sea MNP un triángulo acutángulo. La bisectriz del ángulo en M corta al lado NP en Q y el círculo β circunscrito al triángulo MNP en R. La tangente a β en N corta a MQ en S. Demostrar que si $MQ^2=2\,PQ^2$, entonces R es la mitad de MS (ver figura).*

b) *Sea **MNP** un triángulo equilátero de altura 1 unidad de longitud. El círculo β de radio 1 y de centro situado en el mismo lado de **MN** que **P** es tangente a **MN** en un punto situado entre **M** y **N**. Mostrar que la longitud de arco de círculo situado en el interior del triángulo **MNP** es independiente del punto de tangente.*



Propuesta 2: dos joyitas numéricas

Unamos una vez más la Aritmética (de los números) y la Geometría. Sabemos que los números irracionales no se pueden expresar como una fracción de números enteros, porque no podemos expresarlo como un número cuyo desarrollo decimal no es periódico en la fracción. Solo números con desarrollo decimal finito o infinito y periódico (números racionales Q) se pueden expresar como fracciones de enteros.

El descubrimiento de la raíz cuadrada de 2, $\sqrt{2}$, como un número irracional se atribuye generalmente al pitagórico Hípaso de Metaponto quien fue el primero en realizar la demostración (naturalmente desde el punto de vista geométrico) de la irracionalidad. La historia narra que precisamente descubrió la irracionalidad de $\sqrt{2}$,cuando intentaba averiguar una expresión racional del mismo. Sin embargo, Pitágoras creía en la definición absoluta de los números, y esto le obligaba a no creer en la existencia de los números irracionales. Por esta razón estando ya desde el principio en contra de esa demostración, sus compañeros pitagóricos sentenciaron a Hípaso a la pena capital, ahogándole en el mar. El matemático griego Teeteto (417 a.C.-369 a.C.) proponía el problema de encontrar el lado de un cuadrado, cuya área sea el doble de área de un cuadrado de lado {\displaystyle m}"l". Cuya solución conlleva la aparición de la raíz cuadrada de dos.

En este Sapere Aude presento dos ejercicios con diferentes grados de dificultad.

a) *Trabajemos con el número irracional raíz de dos. Consideremos unos cálculos algebraicos elementales donde interviene el número irracional* $\sqrt{2}$*:*

$$(\sqrt{2}-1)^1 = -1+\sqrt{2}$$
$$(\sqrt{2}-1)^2 = (\sqrt{2}-1).(\sqrt{2}-1) = 2-2\sqrt{2}+1 = 3-2\sqrt{2}$$

a.1. *¿Cuál es el valor de las siguientes potencias,* $(\sqrt{2}-1)^3, (\sqrt{2}-1)^4, (\sqrt{2}-1)^5$*,,,?*

a.2. *Después de algunos cálculos, ¿sabríais obtener, como generalización, una expresión para* $(\sqrt{2}-1)^n$*?*

a.3. *Se podría pensar en una expresión de la forma* $(\sqrt{2}-1)^n = A_n - B_n\sqrt{2}$. *¿Cómo podemos escribir* A_n *y* B_n*?*

b) *La sucesión de números denominada sucesión de Padovan (en honor a Richard Padovan, arquitecto y matemático nacido en 1935) es la sucesión recurrente definida así:*

$$p_1 = 1$$
$$p_2 = 1$$
$$p_3 = 1$$

La sucesión puede ser anodina,

1,1,1,2,2,3,4,5,7,9,12, 16,…

*pe*ro si nos fijamos en el cociente $p_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}$ y calculamos el valor hacia el que tiende en el límite cuando n tiende a infinito, nos encontraremos el número denominado número de plata en similitud con el número de oro o número plástico en el sentido de la belleza arquitectónica.

b.1. *Calcular el valor del límite:* $\Psi = \lim_{n\to\infty} \frac{p_{n+1}}{p_n}$

b.2. *La idea de dibujar una sucesión de triángulos equiláteros en los que la longitud de los lados sean los números de la sucesión de Padovan nos lleva a conseguir una bella figura denominada* **Espiral de triángulos de Padovan**. *¿Sabrías dibujarla?.Utilizar cualquier programa para obtener el dibujo.*

NOTA: Las respuestas pueden enviarla a la dirección electrónica:
sapereaudethales@gmail.com